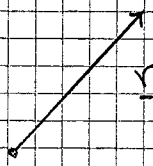
Statica: È quella parte della meccanica che studia le forze in gioco (forze esterne e reazioni vincolari) che permettono ad un sistema di rimanere in equilibrio (statica)

Cinematica: Studia sistemi di corpi rigidi in movimento (velocità)

Geometria delle masse: l'obiettivo principale è quello di trovare il baricentro di un corpo libero

I vettori: strumenti matematici che ludicano grandezze vettoriali, aventi modulo, direzione e verso



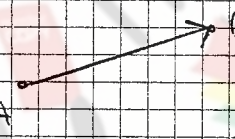
$\underline{v}$ (o $\vec{v}$)

modulo: detto anche "magnitude", è uno scalare positivo

"direction" { direzione: retta su cui giace il vettore
verso: es. dx o sx

p.to di applicazione: punto in cui viene applicata la forza

Presi due punti nello spazio A e B (con loro coordinate in un sistema di riferimento), la differenza B-A è un vettore (segmento orientato)



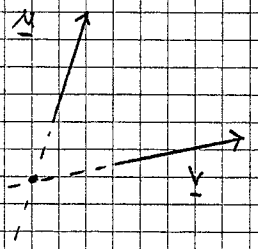
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

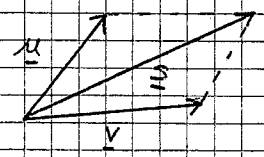
Versore: vettore con modulo unitario

Operazioni tra vettori:

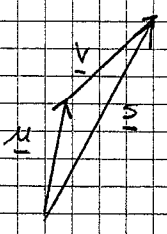
Somma $\underline{s} = \underline{u} + \underline{v}$

Il vettore somma si può ottenere traslando $\underline{u}$ e $\underline{v}$ fino a trovare la loro intersezione, o con la regola del parallelogramma





Altro modo: metodo punta-coda



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

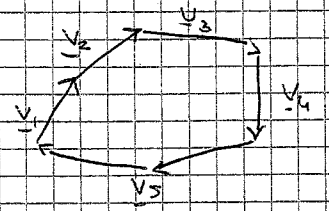
La somma tra vettori è commutativa: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

Differenza $\underline{d} = \underline{u} - \underline{v}$ equivale a dire $\underline{d} = \underline{u} + (-\underline{v})$

dove $-\underline{v}$ è lo stesso $\underline{v}$, con verso opposto.

Vettore nullo = $\underline{0}$

$$\sum_{i=1}^{5} \underline{v}_i = \underline{0}$$



Prodotto — scalare (dot product)
— vettoriale

- Scalare = $\underline{u} \cdot \underline{v} = \alpha \in \mathbb{R} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos\alpha$

angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ (può essere > 0 o < 0)

Quando $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$? — $\underline{u} = \underline{0}$
— $\underline{v} = 0$
— $\underline{v} \perp \underline{u}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|}\right)$$

! Il prodotto scalare è commutativo

- Vettoriale = ha come risultato un vettore

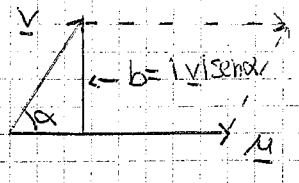
$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$$

- modulo = $|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin\alpha$
- direzione = ortogonale a $\underline{u}$ e $\underline{v}$
- verso = regola della mano dx

! Il prodotto vettoriale è anticommutativo:

$$\underline{v} \wedge \underline{u} = -(\underline{u} \wedge \underline{v})$$

Quando $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$? — $\underline{u} = \underline{0}$
— $\underline{v} = \underline{0}$
— $\underline{v} \parallel \underline{u}$ (cioè $\alpha = 0°$)



$|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \operatorname{sen}\alpha = |\underline{u}| \cdot b$

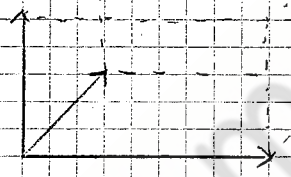
- Prodotto di un vettore con uno scalare

$\underline{v} = a\,\underline{u}$ $\quad$ $\underline{v}$ avrà stessa direzione di $\underline{u}$, a volte il modulo di $\underline{u}$ verso di $\underline{u}$ se $a > 0$, altrimenti se $a < 0$.

- Prodotto misto (o triplo) $\quad (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$

Il prodotto misto si annulla quando $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono COMPLANARI (cioè sono tutti sullo stesso piano)

Se non sono complanari

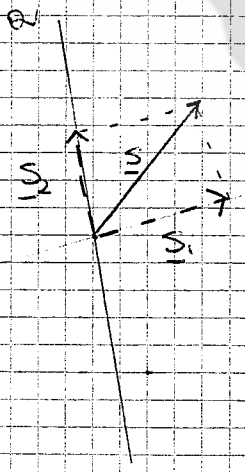


$a \in \mathbb{R}$ sarà il volume del parallelepipedo.

$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v} = (\underline{w} \times \underline{v}) \cdot \underline{u}$

- Doppio prodotto vettoriale $\quad \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$

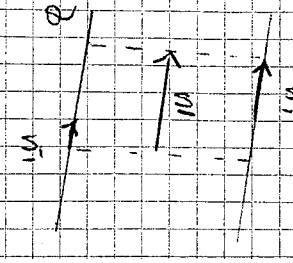
Scomposizione di un vettore. (secondo due direzioni assegnate)



Dato $\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{S}$

dove $\underline{S}_1$ e $\underline{S}_2$ sono detti "vettori componenti di $\underline{S}$" o "componenti di $\underline{S}$" (i più usati sono vettori secondi scalari)

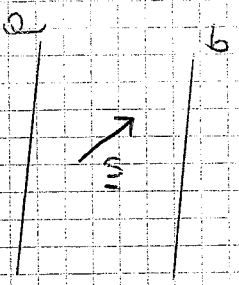
Nel piano la scomposizione è unica, a meno che le rette siano //



$a \,//\, b \,//\, \underline{S}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

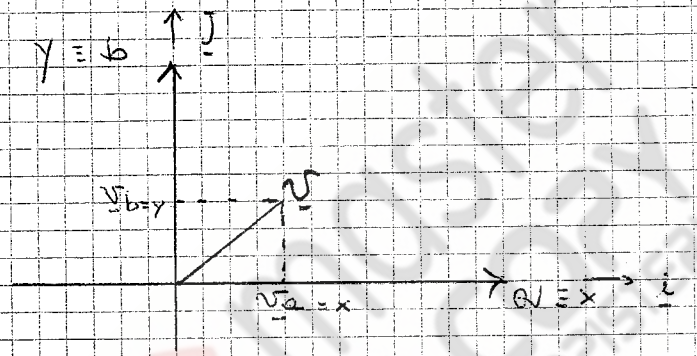
$\underline{s}$ a // b $\nparallel \underline{s}$ non sono ammessi scomponenti



N.B. In algebra si dice che non è una base completa

CASO BIDIMENSIONALE

Prendiamo due direzioni ortogonali e scomponiamo un vettore $\underline{v}$



Stiamo lavorando sul piano cartesiano

$\underline{v} = \underbrace{\underline{v}_x + \underline{v}_y}$
proiezioni ortogonali di $\underline{v}$ sugli assi

$v_x = \underline{v} \cdot \underline{i}$
$v_y = \underline{v} \cdot \underline{J}$
} sono due quantità scalari con segno (che dipende dall'angolo α) E sono le componenti di $\underline{v}$

$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{J}$ } BASE

CASO TRIDIMENSIONALE

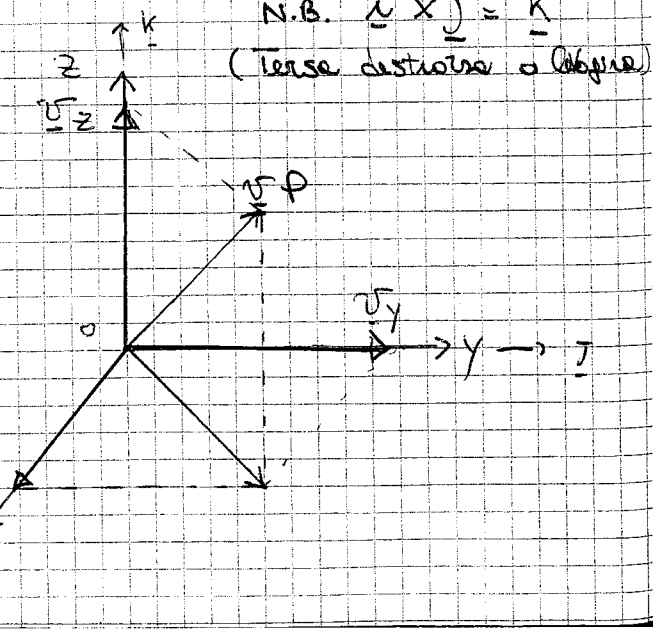
$\underline{v} = \underline{v}_x + \underline{v}_y + \underline{v}_z$

Una volta fissato un sistema di riferimento, la scomposizione è unica

La punta di $\underline{v}$ identifica un punto P nello spazio

$v_x = \underline{v} \cdot \underline{i}$
$v_y = \underline{v} \cdot \underline{J}$
$v_z = \underline{v} \cdot \underline{K}$
} componenti cartesiane di $\underline{v}$

N.B. $\underline{i} \times \underline{J} = \underline{K}$
(Terna destrorsa o levogira)



$$\underline{v} = v_x \cdot \underline{i} + v_y \cdot \underline{j} + v_z \cdot \underline{k}$$

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Notazione rigorosa: $[\underline{v}] = (\ldots) = (x_p, y_p, z_p)$

↑ Le componenti di un vettore sono le coordinate del punto P identificato dal vettore stesso.

ESTRAZIONE DEL MODULO (= norma euclidea)

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$$

↑ Il prodotto scalare del vettore $\underline{v}$ per se stesso sotto radice, mi dà la stessa informazione

sistema di riferimento

$$\underline{s} = \underline{v} + \underline{u} \xrightarrow{SdR} [\underline{s}] = [\underline{u}] + [\underline{v}]$$

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{bmatrix}$$

Analogamente per la differenza

$$d = \underline{u} - \underline{v} \longrightarrow \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \\ u_z - v_z \end{bmatrix}$$

Scalare per un vettore

$$\underline{s} = c\,\underline{u} \Rightarrow (s_x\ s_y\ s_z) = (c u_x\ c u_y\ c u_z)$$

Prodotto scalare

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) \in \mathbb{R}$$

Prodotto vettoriale

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Il det è il risultato del prodotto scalare

Prodotto misto

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \in \mathbb{R}$$